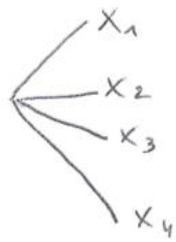
Solutions des exercices d'A.C.

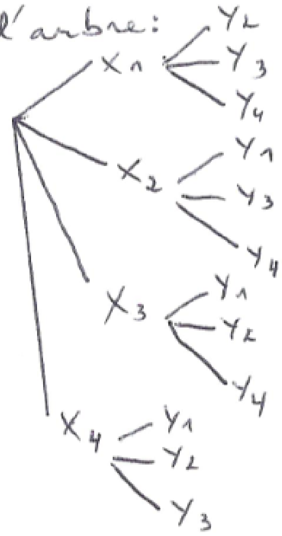
1. Imaginons que

1°) X rentre puis Y (comme on filme, l'ordre dans lequel les 2 personnes rentrent est important)

X peut s'asseoir sur une des 4 chaises (je note X_i le fait que X s'asseoit sur la i^e chaise $i=1,2,3,4$)



Lorsque Y rentre, il reste 3 chaises et on obtient, en notant Y_i le fait que Y s'asseoit sur la i^e chaise $i=1,2,3,4$ l'arbre:



Il y a donc $12 = 4.3$ possibilités ou encore $A_4^2 = \frac{4!}{2!} = 12$ façons de s'asseoir

2°) De la même façon si Y rentre puis X, on a le même nombre de possibilités donc 12

3°) Au total il y en a $12.2 = 24$

2. On dispose de 10 chiffres pour constituer un nombre.

- L'ordre des chiffres importe (évident !)
- On ne précise pas que les chiffres doivent être différents donc il peut y avoir répétition d'un ou plusieurs ch.
- $n = 10$ et $p = 4$

donc on utilise la formule α_n^p (arrangements ac répétition)

Il y a α_{10}^4 nombres de 4 chiffres mais ceux-ci incluent les nombres commençant par zéro (qui sont des nombres de 3 chiffres)

Il faut donc retirer à α_{10}^4 les nombres commençant par zéro et il y en a α_{10}^3

Finalement, il y a $\alpha_{10}^4 - \alpha_{10}^3 = 10^4 - 10^3 = 9000$ nombres de 4 chiffres.

3. a)
- L'ordre dans lequel les personnes s'associent est important (on en permute 2 et on n'a plus la m^ configurat)
- Il n'y a pas de répétition possible (les personnes ne peuvent pas se dupliquer !)
- $n = 8$ et $p = 5$

donc on utilise la formule A_n^p (arrangements sans répétition)

Il y a $A_8^5 = \frac{8!}{3!} = 6720$ façons

b) Le raisonnement est identique qu'au a) sauf que $n = p = 8$ donc on utilise $P_8 \left(= A_8^8\right) = 8! = 40\,320$.

↳ arrangement particulier.

4. Ecrivons un signe possible : • □ □ □ • • → en relief

- L'ordre des points importe (si on en permute 2, on obtient un signe différent)
- Comme le montre l'exemple il peut y avoir répétition
- $n = 2$ et $p = 6$ (nombre de places possibles)

  ↓

  2 symboles possibles • ou □

donc on utilise α_n^p

Il y a donc $\alpha_2^6 = 2^6 = 64$ signes possibles.

5. a)
- L'ordre des lettres importe (évident !)
- On ne précise pas si les lettres sont différentes donc il peut y avoir répétition des lettres
- $n = 26$ et $p = 5$

donc il y a $\alpha_{26}^5 = 26^5$ mots possibles

b)
- L'ordre importe
- Lettres différentes donc pas de répétition
- $n = 26$ et $p = 5$

donc il y a $A_{26}^5 = \dfrac{26!}{21!} = 7893600$ mots.

6. a)
- L'ordre importe. Pas de répétition (chiffres distincts)
- $n = 6$ et $p = 3$

donc il y a $A_6^3 = \dfrac{6!}{3!} = 120$ nombres

b) Les nombres inférieurs à 400 commencent par 3 ou par 2

Ils sont du type : $3 \underbrace{\cdot\ \cdot}_{\neq 3}$ ou $2 \underbrace{\cdot\ \cdot}_{\neq 2}$

Il y a donc $A_{6-1}^2 = A_5^2 = 20$ nombres du 1° type

et de la même façon $A_5^2 = 20$ " " 2° "

Donc il y a $20 + 20 = 40$ nombres.

c) Les nombres pairs dans ce cas se terminent par 2 ou 6. (il n'y a pas 0, 4, 8 dans la liste)
Ils sont donc du type : $\underbrace{\cdot\ \cdot}_{\neq 2}\ 2$ ou $\underbrace{\cdot\ \cdot}_{\neq 6}\ 6$

Il y a donc $2 . A_5^2 = 40$ nombres de ce type

d) Les nombres multiples de 5 dans ce cas se terminent par 5 (il n'y a pas zéro ds la liste)
Ils sont du type $\underbrace{\cdot\ \cdot}_{\neq 5}\ 5$ et il y en a $A_5^2 = 20$.

7. On peut choisir les hors-d'oeuvre de 10 façons diff.
et " " " " entrées " 4 " "
et " " " " plats " 11 " "
et " " " " desserts " 9 " "

Au total il y a $10 . 4 . 11 . 9 = 3960$ menus différents.
(C'est typiquement une structure en arbre qu'il est impossible de représenter comme dans l'ex. 1)

8. Imaginons que les 5 dés soient de la même couleur
La question posée reviendrait à se demander combien de nombres de 5 chiffres formés avec les chiffres de 1 à 6 on peut constituer.

L'ordre importe, répétitions possibles, $n = 6$ et $p = 5$
donc il y a $\alpha_6^5 = 6^5$ nombres
Il faut tenir compte de la couleur de chacun des chiffres. Il y a $P_5 = 5!$ façons d'écrire, par exemple les lettres B(leu), R(ouge), V(ert), N(oir), J(aune)
Au total il y a $P_5 . \alpha_6^5 = 933120$ façons d'aligner les 5 dés.

9. a) Les étages portent les numéros 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.
La question posée revient à déterminer la quantité de nombres de 5 chiffres constitués à l'aide des chiffres de 1 à 8.
Par ex. le nombre 1 3 1 5 8 signifie que
la 1^e personne est descendue à l'étage 1
2^e " " " 3
3^e " " " 1
4^e " " " 5
5^e " " " 8
Le nombre 4 4 4 4 4 signifie que les 5 personnes sont descendues à l'étage 4
Donc il y a $\alpha_8^5 = 8^5 = 32768$ façons

b) Si à chaque étage un occupant au max. quitte l'ascenseur, cela signifie que les chiffres de 1 à 8 ne peuvent pas se répéter.
Donc il y a $A_8^5 = 6720$ façons.

10. a) Il s'agit d'une permutation circulaire.
Une des 9 personnes est fixée et les 8 autres se placent sur le cercle autour de lui.
Il y a donc $P_8 = 8! = 40320$ façons

b) Appelons ces personnes X et Y et fixons-les sur le cercle. On peut avoir :

ou

Les 7 personnes restantes permutent autour du groupe formé par XY.
Il y a donc $2\,P_7 = 2 \cdot 7! = 10\,080$ façons.

11. L'ordre importe et il y a répétition des lettres B, Bl, R
(Exemple : B Bl R R B R Bl R Bl)
Il y a 10 = 5 + 2 + 3 boules et 10 places.
Donc permutation avec répétition. $P_n^{r_1, r_2, \dots, r_k}$
Ici il y a $P_{10}^{5,2,3} = \frac{10!}{5!\,2!\,3!} = 2520$ façons

12. a) L'ordre importe et il y a répétition des lettres
M, I, S, P. Il y a 1M, 4I, 4S et 2P avec 1+4+4+2 = 11
Donc il y a $P_{11}^{1,4,4,2} = \frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!} = 34650$ mots

b) Le mot est du type $S \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{}$ S
9 places à remplir avec
2S, 4I, 2P et 1M
Donc il y a : $P_9^{2,4,2,1} = \frac{9!}{2!\,4!\,2!\,1!} = 3780$ mots

13. Il y a 3 consonnes T, L et S et les mots sont
du type T . . L . . S .
Les 5 places restantes doivent être occupées par 2O, 2U
et 1E et les lettres T, L et S peuvent être écrites
de P_3 façons différentes
Donc il y a $P_3 \cdot P_5^{2,2,1} = 3!\,\frac{5!}{2!\,2!\,1!} = 180$ mots